Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

1. Dziedzina: $x \in \mathbb{R}_+$
2. Punkty przecięcia z osiami: $x = 0$ nie należy do dziedziny, dla $y = 0$ $0 = 2\sqrt{x} - \ln x$ - trudno wyliczyć, zostawiamy
3. Własności szczególne: funkcja nie jest parzysta, nieparzysta ani okresowa.
4. Ciągłość: funkcja jest ciągła w swojej dziedzinie, bo składa się z funkcji elementarnych.
5. Asymptoty:

   pionowe: $\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} - \ln x = +\infty$ - jest asymptota pionowa prawostronna w $x = 0$

   ukośne: $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x} - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{x} \right) = *$

   $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^H = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

   $* = 0 - 0 = 0$ - nie ma asymptot ukośnych

   pionowe: $\lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x} - \ln x = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(2 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}) = *$

   $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} =^H \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = 0$

   $* = [\infty \cdot 2] = \infty$ - brak asymptot poziomych

6. Analiza pierwszej pochodnej: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

   $x > 0$, więc dla $x > 1$ $f'(x) > 0$, czyli f rosnąca
   dla $x \in (0;1) f'(x) < 0$, czyli f malejąca

   $x = 1$ - minimum lokalne, $f(1) = 2\sqrt{1} - \ln 1 = 2$

7. Analiza drugiej pochodnej $f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x - \sqrt{x} + 1}{x} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{x}$

   $x > 0$ więc dla $x \in (0;4) f''(x) > 0$, czyli f wypukła
   dla $x \in (4;\infty) f''(x) < 0$, czyli f wklęsła

   $x = 4$ - punkt przegięcia $f(4) = 2\sqrt{4} - \ln 4$ - około 3

8. Tabelka

x	0^+	$(0;1)$	1	$(1;4)$	4	$(4;\infty)$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	≈ 3	$\nearrow$
$f'(x)$		-	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	-

dokładnie
4-ln4